



International Journal of Sanskrit Research

अनन्ता

ISSN: 2394-7519

IJSR 2023; 9(6): 249-253

© 2023 IJSR

www.anantaajournal.com

Received: 01-09-2023

Accepted: 10-10-2023

डॉ. आयुष गुप्ता

सहायक प्राध्यापक, वैदिक
अध्ययन विभाग, डॉ हरीसिंह
गौर विश्वविद्यालय, सागर,
मध्य प्रदेश, भारत

भास्कराचार्य कृत लीलावती में गुणन की विविध विधियाँ

डॉ. आयुष गुप्ता

सारांश

भारतीय ज्ञान परम्परा अनेक प्रकार के ज्ञानरूप बहुमूल्य रत्नों से भरी हुई है। संस्कृत ग्रंथों में केवल वैदिक साहित्य, अध्यात्म, दर्शन एवं व्याकरण मात्र ही नहीं बल्कि गणित, भौतिकी, रसायन एवं पर्यावरण विज्ञान से संबंधित अनेक विधाओं के ग्रंथ प्राप्त होते हैं। लीलावती गणित विषय से सम्बद्ध ग्रंथ है। इस ग्रंथ में गणितीय संक्रियाओं पर अनेक उदाहरण संक्रिया सहित प्राप्त होते हैं। भास्कराचार्य कृत लीलावती में गुणन की संक्रिया को पद्यों के माध्यम से स्पष्ट किया है। इन पद्यों को पाँच गुणन विधियों के रूप में अलग अलग करके उनका वर्णन किया जा रहा है। इन 5 विधियों में अंकों अथवा व्यंजकों की प्रकृति के आधार पर सरलतम विधि का उपयोग करके प्रश्नों को हल किया जा सकता है। लीलावती, भारतीय गणितज्ञ भास्कर द्वितीय द्वारा सन ११५० ईस्वी में संस्कृत में रचित, गणित और खगोल शास्त्र का एक प्राचीन ग्रन्थ है, इसमें 625 श्लोक हैं साथ ही यह सिद्धान्त शिरोमणि का एक अंग भी है। लीलावती में अंकगणित का विवेचन किया गया है। 'लीलावती', भास्कराचार्य की पुत्री का नाम था। इस ग्रन्थ में पाटीगणित (अंकगणित), बीजगणित और ज्यामिति के प्रश्न एवं उनके उत्तर हैं।

कूटशब्द: लीलावती, अङ्कपाश, गुण्य, गुणक, गुणनफल, उपान्त अङ्क

प्रस्तावना

भारतीय ज्ञान परम्परा अनेक प्रकार के ज्ञानरूप बहुमूल्य रत्नों से भरी हुई है। संस्कृत ग्रंथों में केवल वैदिक साहित्य, अध्यात्म, दर्शन एवं व्याकरण मात्र ही नहीं बल्कि गणित, भौतिकी, रसायन एवं पर्यावरण विज्ञान से संबंधित अनेक विधाओं के ग्रंथ प्राप्त होते हैं। लीलावती गणित विषय से सम्बद्ध ग्रंथ है। इस ग्रंथ में गणितीय संक्रियाओं पर अनेक उदाहरण संक्रिया सहित प्राप्त होते हैं। भास्कराचार्य कृत लीलावती में गुणन की संक्रिया को पद्यों के माध्यम से स्पष्ट किया है।

Corresponding Author:

डॉ. आयुष गुप्ता

सहायक प्राध्यापक, वैदिक
अध्ययन विभाग, डॉ हरीसिंह
गौर विश्वविद्यालय, सागर,
मध्य प्रदेश, भारत

इन पद्यों को पाँच गुणन विधियों के रूप में अलग अलग करके उनका वर्णन किया जा रहा है। इन 5 विधियों में अंकों अथवा व्यंजकों की प्रकृति के आधार पर सरलतम विधि का उपयोग करके प्रश्नों को हल किया जा सकता है। लीलावती, भारतीय गणितज्ञ भास्कर द्वितीय द्वारा सन ११५० ईस्वी में संस्कृत में रचित, गणित और खगोल शास्त्र का एक प्राचीन ग्रन्थ है, इसमें 625 श्लोक हैं साथ ही यह सिद्धान्त शिरोमणि का एक अंग भी है। लीलावती में अंकगणित का विवेचन किया गया है। 'लीलावती', भास्कराचार्य की पुत्री का नाम था। इस ग्रन्थ में पाटीगणित (अंकगणित), बीजगणित और ज्यामिति के प्रश्न एवं उनके उत्तर हैं। प्रश्न प्रायः लीलावती को सम्बोधित करके पूछे गये हैं। लीलावती में १३ अध्याय हैं जिनमें निम्नलिखित विषयों का समावेश है-

१. परिभाषा
२. परिकर्म-अष्टक (संकलन (जोड़), व्यवकलन (घटाना), गुणन (गुणा करना), भाग (भाग करना), वर्ग (वर्ग करना), वर्गमूल (वर्ग मूल निकालना), घन (घन करना), घनमूल (घन मूल निकालना))
३. भिन्न-परिकर्म-अष्टक
४. शून्य-परिकर्म-अष्टक
५. प्रकीर्णक
६. मिश्रक-व्यवहार - इसमें ब्याज, स्वर्ण की मिलावट आदि से सम्बन्धित प्रश्न आते हैं।
७. श्रेढी-व्यवहार
८. क्षेत्र-व्यवहार
९. खात-व्यवहार
१०. चिति-व्यवहार
११. क्रकच-व्यवहार
१२. राशि-व्यवहार
१३. छाया-व्यवहार
१४. कुट्टक
१५. अंक-पाश

गुणन की प्रथम विधि

गुण्य संख्याओं में जो अन्तिम अङ्क हो उसको गुणक से गुणा करके उसी के सामने रखना, फिर उसी गुणक को आगे बढ़ाकर क्रम से अगले अगले अंकों को गुणा करके अपने अपने स्थान पर रख कर जोड़ देने से गुणनफल प्राप्त हो जाता है। (जिस संख्या से गुणा किया जाता है वह गुणक एवं जिसको गुणा किया जाता है उसे गुण्य कहा जाता है।)

गुण्यान्त्यमङ्कं गुणकेन हन्यादुत्सारितेन एव उपान्तिमादीन्।¹

उपरोक्त गुणन की क्रिया अप्रचलित है। सामान्य पद्धति से गुणा करने में इस प्रक्रिया का प्रचलन कम है। यहाँ गुण्य का अन्तिम अङ्क, एवं उपान्त अंकों को समझना आवश्यक है। मान लेते हैं कि कोई संख्या 5241 है, इस संख्या का अन्तिम अङ्क 5 होगा उपान्त अङ्क 2 होगा, तथा अगला उपान्त अङ्क 4 तथा आदि अङ्क 1 होगा। (उपान्त का अर्थ है अन्तिम अङ्क के समीप का अङ्क)। मान लेते हैं कि इस संख्या को 15 से गुणा करना है। इस प्रक्रिया को सोपान क्रम में इस प्रकार समझ सकते हैं

1. 5241 और 15 की गुणन प्रक्रिया में मान लेते हैं कि 5241 गुण्य है, तथा 15 गुणक
2. गुण्य का अन्तिम अङ्क है 5 अतः गुणक (15) से गुण्यान्त् (5) को गुणा करने पर 75 प्राप्त होगा
3. गुण्य का उपान्तिम अङ्क है 2 अतः गुणक (15) से गुण्य के उपान्त (2) को गुणा करने पर 30 प्राप्त होगा
4. गुण्य का अगला उपान्तिम अङ्क है 4 अतः गुणक (15) से गुण्य के अगले उपान्त (4) को गुणा करने पर 60 प्राप्त होगा

5. गुण्य का आदि अङ्क है 1 अतः गुणक (15) से गुण्य के आदि अङ्क (1) को गुणा करने पर 15 प्राप्त होगा।

इस प्रकार इन संख्याओं को यथास्थान रखकर जोड़ देने पर गुणनफल प्राप्त हो जाता है

$$\begin{array}{r} 75 \\ 30 \\ 60 \\ 15 \end{array}$$

$$\text{गुणनफल} = 78615$$

इस प्रकार 5241 एवं 15 का गुणनफल 78615 प्राप्त हो जाता है। यहाँ यह ध्यातव्य है कि अंत, उपान्त एवं आदि अंकों से गुणक का गुणन करके उन संख्याओं को यथा स्थान ही रखना चाहिए।

गुणन की द्वितीय विधि: गुण्य को अलग अलग भागों में बांटकर उन खंडों को गुणक से गुणा करके उन्हें परस्पर जोड़ने पर गुणनफल प्राप्त किया जा सकता है।

गुण्यस्त्वधोऽधो गुणखण्डतुल्यस्तेः खण्डकैः संगुणितो युतो वा।²

पिछले उदाहरण में हमने गुणक 15 लिया था। 15 एक सरल गुणक है जिसका पहाडा लगभग प्रत्येक छात्र को याद होता है। मान लीजिए कि 7345 को 59 से गुणा करना है। इस प्रक्रिया के अनुसार इस गुणन प्रक्रिया के निम्न सोपान होंगे -

1. गुणक को दो ऐसे भागों में तोड़ना जिससे गुणा आसान हो जाए $59 = 50+9$
2. गुण्य (7345) को 50 से गुणा करना $7345*50 = 367250$
3. गुण्य (7345) को 9 से गुण करना $7345*9 = 66105$

$$\begin{array}{r} 4. \text{ दोनों गुणनफलों का योग करना } 367250 \\ + 66105 \\ \text{योगफल} = 433355 \end{array}$$

इस प्रकार बड़े गुणकों को दो भागों में तोड़कर, अलग अलग गुण्य से गुणा करके उन्हें जोड़ने पर गुणनफल प्राप्त किया जा सकता है।

इस प्रक्रिया को बीजगणितीय रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है - $a * b = a * (c + d)$, जहाँ $b = c + d$.

गुणन की तृतीय विधि जिस संख्या से भाग दिए जाने पर गुणक पूर्णतया विभाजित हो जाता है। उस संख्या से तथा तथा लब्धि से गुण्य को गुणा करने पर गुणनफल प्राप्त होता है।

भक्तो गुणः शुधयति येन तेन लब्धया च गुण्यो गुणितः फलं वा।³

यह अर्थ प्रयोग की दृष्टि से अत्यंत सरल है, किन्तु भाषिक दृष्टि से इस तथ्य को समझने में कठिनाई होती है। इस प्रक्रिया को गुणनखंड द्वारा गुणन प्रक्रिया को हल करना भी कहा जा सकता है। मान लेते हैं कि 45 में 98 का गुणा करना है। इस प्रक्रिया को सूत्र के अर्थ के आधार पर निम्न सोपानों द्वारा समझ सकते हैं -

1. यहाँ गुणक 45 तथा गुण्य को 98 ले लेते हैं।
2. गुणक (45) को 5 से भाग देने पर यह पूर्णतया विभाजित हो जाता है। $45/5 = 9$
3. लब्धि अर्थात् भाग देने के पश्चात भागफल 9 प्राप्त हुआ।
4. अब जिस संख्या से गुणक में भाग दिया था (5) तथा लब्धि (9) को गुण्य (98) से क्रमशः गुणा किए जाने पर अभीष्ट गुणनफल प्राप्त हो जाता है। $45*98 = 5*9*98$
5. पहले 98 में 5 का गुणा करने पर 490 प्राप्त होता है

6. 490 में 9 से गुणा करने पर 4410 प्राप्त होता है, जो कि अभीष्ट गुणखंड है।

यहाँ यदि 45 का 98 से सीधा गुणा करेंगे, तो प्रथम अथवा द्वितीय विधि का भी प्रयोग किया जा सकता था, किंतु दोनों प्रक्रियाओं में दो पंक्तियों की आवश्यकता होती। इस विधि में एक ही पंक्ति में दो बार गुणन प्रक्रिया से यह विधि अपेक्षाकृत सरल एवं मानसिक प्रक्रिया से हो सकती है। इस विधि से भी गुणनफल आसान हो जाता है।

इस प्रक्रिया को बीजगणितीय रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है - $a * b = a * (c * d)$, जहाँ $b = c * d$

गुणन की चतुर्थ विधि: किसी अङ्क विभाग दो प्रकार से होता है। (प्रथम खण्ड विभाग तथा द्वितीय स्थान विभाग)। गुणक के पृथक पृथक स्थानीय अंकों से गुण्य को गुणा करके फिर यथास्थान रखकर योग करने पर अभीष्ट गुणनफल प्राप्त होता है।

द्विधा भवेत् रूपविभाग एवं स्थानैः पृथग्वा गुणितः समेताः।⁴

इस प्रकरण में संख्या के दो प्रकार से विभाग की बात बताई गई है। 1. खण्ड विभाग 2. स्थान विभाग। इससे प्रथम प्रकरण में हमने खण्ड विभाग को समझा था। यथा 45 के खण्ड (गुणनखंड) विभाग हैं 9 तथा 5, इसी प्रकार 36 के खण्ड विभाग हो सकते हैं 9 तथा 4। अब यहाँ स्थान विभाग को समझना महत्वपूर्ण हैं। स्थान विभाग वह विभाग होता है जिसमें अंकों का मान उनके स्थानीय मान के आधार पर रखा जाता है। माना कि एक संख्या 136 है इसमें इकाई का अङ्क 6 है, दहाई का अङ्क 3 है तथा सैकड़े का अङ्क 1 है। अतः इस संख्या के तीन स्थानीय

विभाग होंगे $100+30+6$ । यही स्थानीय विभाग कहलाता है।

मान लीजिए कि 136 को 12 से गुणा करना है तो इस प्रक्रिया के आधार पर यह गुणन संक्रिया निम्न सोपानों में व्यक्त की जा सकती है-

1. गुणक 136 के स्थानीय विभाग करने पर - $100+30+6$
2. इकाई के अङ्क 6 को गुण्य (12) से गुणा करने पर- $12*6= 72$
3. दहाई के अङ्क 3 से इंगित संख्या (30) को गुण्य (12) से गुणा करने पर $30*12= 360$
4. सैकड़े के अङ्क 1 से इंगित संख्या (100) को गुण्य (12) से गुणा करने पर $100* 12= 1200$
5. इन प्राप्त गुणनफलों को यथास्थान रखकर जोड़ने पर - $1200+360+72= 1632$
6. इस प्रकार प्राप्त योगफल ही दी गई संख्याओं का अभीष्ट गुणनफल होगा।

प्रक्रिया की सीमाएँ एवं ध्यातव्य बिन्दु: इस प्रक्रिया में यह ध्यान रखना आवश्यक है कि जिस संख्या का जो स्थानीय मान है उसी संख्या से गुणा करना चाहिए।

इस प्रक्रिया को बीजगणितीय रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है - $(100c + 10b + a)* d = (100c *d) + (10b * d) + (a * d)$

गुणन की पंचम विधि: गुणक में अभीष्ट संख्या जोड़कर अथवा घटाकर गुण्य को गुणा करें, फिर गुणनफल में उसी अभीष्ट संख्या से गुणित गुण्य को क्रम से जोड़ने और घटाने से वास्तविक गुणनफल प्राप्त होता है।

इष्टोनयुक्तेन गुणेन निघ्नोऽभीष्टघनगुण्यान्वित वर्जितो वा।⁵

मान लेते हैं कि हमें 135 को 12 से गुणा करना है। यदि हमें 12 का पहाड़ा कंठस्थ नहीं, तो हम 12 में से 2 घटाकर $12-2 = 10$ प्राप्त कर लेते हैं। अब प्रक्रिया को निम्न चरणों में समझ सकते हैं-

1. 135 को 12 से गुणा करने हेतु सर्वप्रथम गुणक 12 में से 2 घटाकर 10 प्राप्त किया ।
2. अब इस प्राप्त संख्या से गुण्य 135 को करके 1350 प्राप्त होता है।
3. घटायी गई संख्या /अङ्क (2) से गुण्य 135 को गुणा करने पर 270 प्राप्त होता है।
4. इन दोनों गुणनफलों को जोड़ देने पर $1350+270= 1620$ यही अभीष्ट गुणनफल होगा।

इस उदाहरण में हमने गुणक से संख्या को घटाकर गुणनफल प्राप्त किया है। अब किसी इष्ट संख्या को जोड़कर भी गुणनफल प्राप्त किया जा सकता है, जिसकी चरणबद्ध प्रक्रिया निम्न है -

1. गुणक 12 में 8 जोड़कर $12+8= 20$ प्राप्त किया ।
2. अब इस प्राप्त संख्या 20 से गुण्य 135 को करके 2700 प्राप्त होता है।
3. जोड़ी गई संख्या /अङ्क (8) से गुण्य 135 को गुणा करने पर 1080 प्राप्त होता है।
4. प्रथम गुणनफल से द्वितीय गुणनफल को घटाने पर $2700-1080= 1620$ यही अभीष्ट गुणनफल होगा।

इस प्रकार इष्ट अङ्क को घटाकर एवं जोड़कर किस प्रकार गुणन की प्रक्रिया को सरल बनाया जा सकता है, यह हमने इस नियम से समझा।

प्रक्रिया की सीमाएँ एवं ध्यातव्य बिन्दु- यहाँ यह ध्यान रखना चाहिए कि यदि हम गुणक में इष्ट अङ्क को जोड़ रहे हैं तो गुण्य से इष्ट अङ्क को गुणा करके घटाना है, जबकि जब हम इष्ट अङ्क

को गुणक से घटाते हैं, तो हमें गुण्य से इष्ट अङ्क को गुणा करके जोड़ना होता है।

इस प्रक्रिया को बीजगणितीय रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है - $a * b = a * (b + c) - a*c$

तथा $a * b = a * (b - c) + (a*c)$

संदर्भ सूची

1. लीलावती - गुणन प्रक्रिया पद्य 1
2. लीलावती - गुणन प्रक्रिया पद्य 1 का द्वितीय अर्धांश
3. लीलावती - गुणन प्रक्रिया पद्य 2
4. लीलावती - गुणन प्रक्रिया पद्य 2 का द्वितीय अर्धांश
5. लीलावती - गुणन प्रक्रिया पद्य 3