International Journal of Sanskrit Research
अनन्ता

ISSN: 2394-7519
IJSR 2022; 8(1): 296-305

www.anantaajournal.com
Received: 29-11-2021
Accepted: 15-12-2021

डॉ. ज्योति
असिस्टेंट प्रोफ़ेसर, संस्कृत एवं प्राच्य विद्या अध्ययन संस्थान, जवाहरलालनेहरू विश्वविद्यालय, दिल्ली, भारत

डॉ. आशीष कुमार
असिस्टेंट प्रोफ़ेसर, संस्कृत संकाय, मानविकी विद्यापीठ, इग्नू, दिल्ली, भारत

डॉ. अनीता रानी
संस्कृत शिक्षिका, राजकीय कन्या उच्चतर माध्यमिक विद्यालय नम्बर-2, उत्तम नगर, दिल्ली, भारत

डॉ. प्रीति
असिस्टेंट प्रोफ़ेसर, संस्कृत विभाग, विवेकानन्द महाविद्यालय, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली, भारत

सन्ध्या मिश्रा
प्राइमरी अध्यापिका, प्राथमिक विद्यालय ठठेरिया, उत्तर-प्रदेश, भारत

Corresponding Author:
डॉ. ज्योति
असिस्टेंट प्रोफ़ेसर, संस्कृत एवं प्राच्य विद्या अध्ययन संस्थान, जवाहरलालनेहरू विश्वविद्यालय, दिल्ली, भारत

वैदिक गणितीय सूत्र 'ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्' की विविध आनुप्रयोगिक विधियाँ

डॉ. ज्योति, डॉ. आशीष कुमार, डॉ. अनीता रानी, डॉ. प्रीति, सन्ध्या मिश्रा

प्रस्तावना

जगद्गुरु स्वामी श्री भारती कृष्ण तीर्थ महाराज जी के द्वारा वैदिक गणित के 16 सूत्र व 13 उपसूत्र बतलाये गए हैं, जिनके माध्यम से अत्यंत सरल व मौखिक रूप से गणित के कठिन प्रश्नों को भी शीघ्रातिशीघ्र हल किया जा सकता है। गणित की विभिन्न शाखाओं पर ये सूत्र लागू होते हैं; यथा अंकगणित, बीजगणित, रेखा गणित – समतल तथा गोलीय त्रिकोणमिति – समतल एवं घन ज्यामितीय और वैश्लेषिक। शंकव, ज्योतिर्विज्ञान, समाकल तथा अवकल-कलन इत्यादि में भी ये सूत्र उपयोगी हैं। वस्तुतः शुद्ध तथा प्रयुक्त गणित में ऐसा कोई भाग नहीं है, जिसमें इनका अनुप्रयोग न हो। इन्हीं सूत्रों में से एक सूत्र है 'ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्'। इस सूत्र के माध्यम से गुणा व भाग करने की सरलतम विधि को प्रतिपादित किया गया है। वैदिक गणित में गुणा व भाग करने की विधि अत्यन्त रोचक है। इसे सभी अवस्थाओं में लागू किया जा सकता है।

कहा जाता है कि इन्द्र के आयुध वज्र की आकृति X इस प्रकार की थी। हमारा गुणन चिह्न भी इसी आकृति को दर्शाता है। ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र में जो गुणा करने की विधि बतलाई गई है, उसमें भी X गुणन चिह्न के अनुसार ही तिरछे गुणा किया जाता है।

'ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्' सूत्र का अर्थ

सूत्र का अर्थ = ऊर्ध्व (ऊपर) तथा तिर्यग् (तिरछा) दोनों विधियों से। (Vertically and Crosswise).

यहाँ ऊर्ध्व से तात्पर्य है - ऊपर और नीचे की संख्याओं को परस्पर गुणा करना।

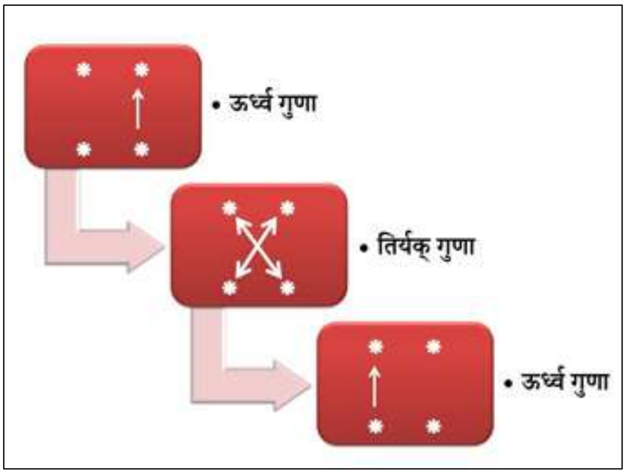
तिर्यक् से तात्पर्य है – दायीं ओर के अंकों को बायीं ओर के अंकों से गुणा करना अर्थात् इकाई के अंकों से दहाई के अंकों को परस्पर गुणा करना।

गुणन विधि

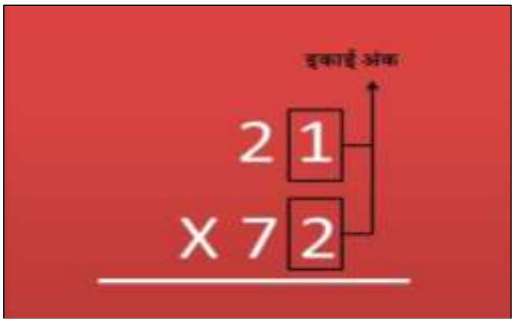
कहा जाता है कि इन्द्र के आयुध वज्र की आकृति x इस प्रकार की थी। हमारा गुणन चिह्न भी इसी आकृति को दर्शाता है। ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र में जो गुणा करने की विधि बतलाई गई है उसमें भी x गुणन चिह्न के अनुसार ही तिरछे गुणा किया जाता है। आइये इस वैदिक गुणन विधि को अब जानें।

दो अंकों की संख्या को दो अंकों वाली संख्या से गुणा

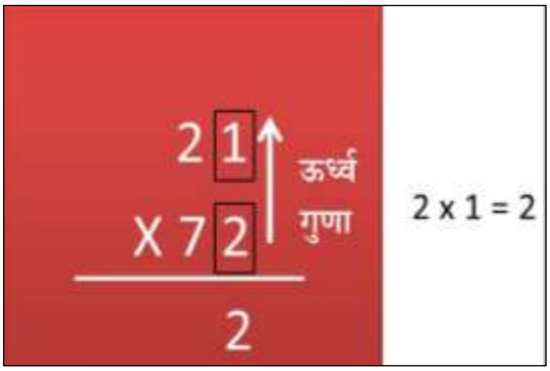
2 अंकों की संख्या को 2 अंकों वाली संख्या से गुणा करने के लिए निम्न पद्धति को अपनाया जाता है, जिसे इस चित्र के माध्यम से स्पष्ट किया जा रहा है –



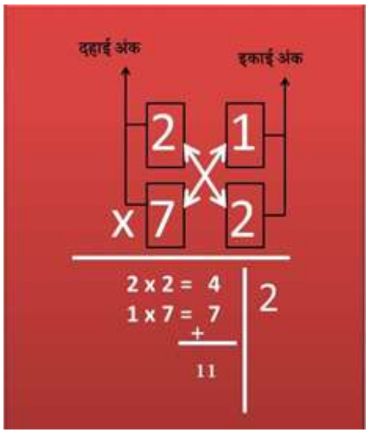
- उदाहरण के तौर पर हम 21 x 72 गुणा करेंगे।
- सर्वप्रथम इकाई के अंक को इकाई के अंक से गुणा करें।
- 21 x 72 में इकाई अंक हैं '1' तथा '2'।



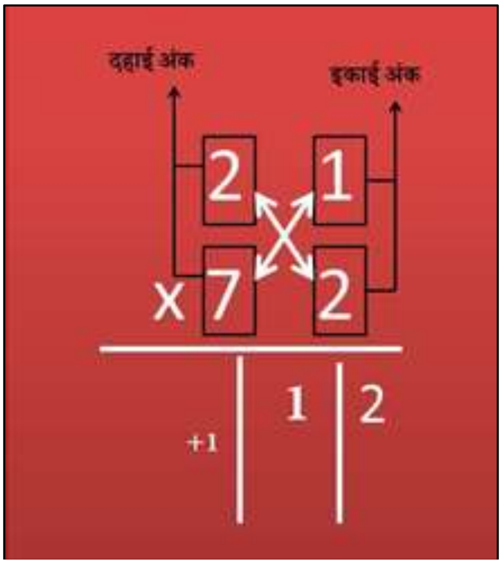
- इकाई अंकों को अर्थात् '2' को '1' से ऊर्ध्व गुणा करें, गुणा करने पर संख्या प्राप्त हुई (2 x 1 =) '2'.
- यह '2' उत्तर का दाहिना अंक है।
- यहाँ '2' को '1' से गुणा करना ही ऊर्ध्व गुणा है।



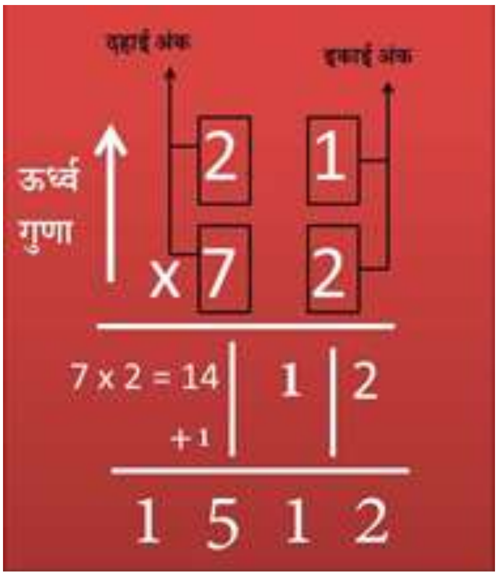
- 21 x 72 में दहाई अंक हैं '2' तथा '7'।
- अब इकाई के अंकों को दहाई के अंको से तिर्यक् गुणा करें अर्थात् '2' को '2' से गुणा करें तथा '1' को '7' से गुणा करें 2 x 2 = 4, 1 x 7 = 7, गुणा करके दोनों उत्तरों को जोड़ लें 4 + 7 = 11.



- अब प्राप्त अंकों को नीचे दिए गए चित्र के अनुसार लिखें।



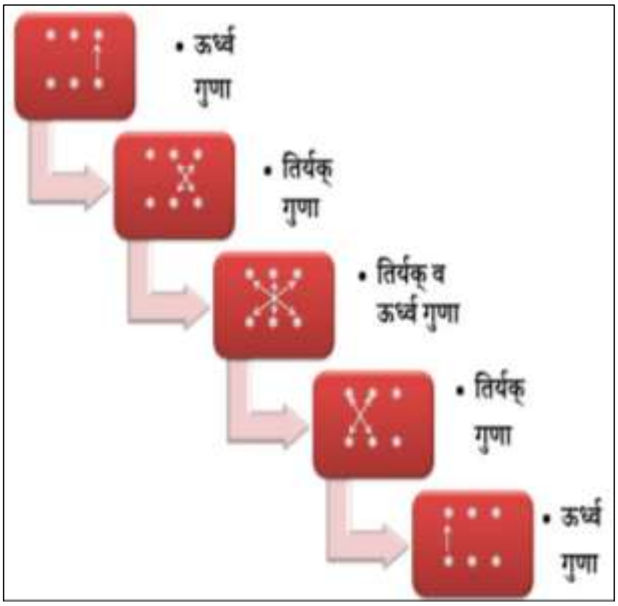
- अब दहाई अंकों को अर्थात् '7' को '2' से ऊर्ध्व गुणा करें, गुणा करने पर संख्या प्राप्त हुई (7 x 2 =) '14'.



- अब 14 में 1 जोड़ने पर संख्या प्राप्त हुई ‘15’
- यह 15 उत्तर का बायाँ भाग है।
- अतः 21 x 72 = 1512

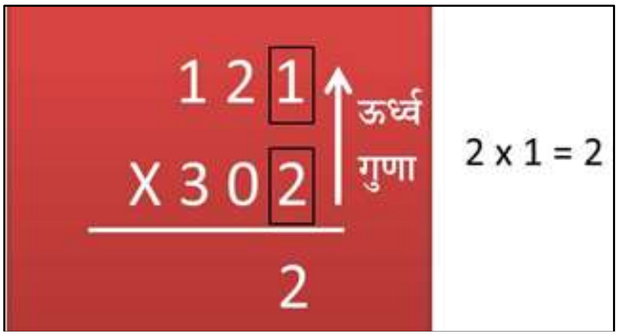
तीन अंकों की संख्या को तीन अंकों वाली संख्या से गुणा

3 अंकों की संख्या को 3 अंकों वाली संख्या से गुणा करने के लिए निम्न पद्धति को अपनाया जाता है, जिसे इस चित्र के माध्यम से स्पष्ट किया जा रहा है –

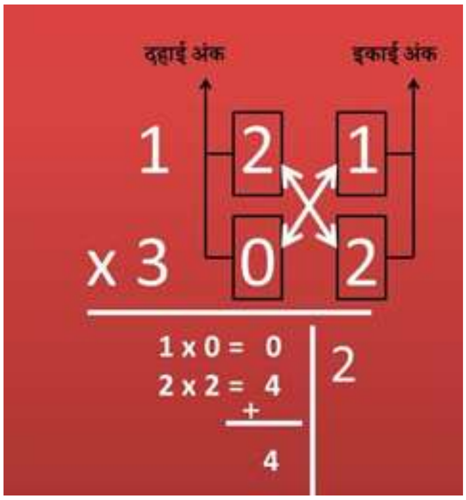


- उदाहरण के तौर पर हम 121 x 302 गुणा करेंगे।
- सर्वप्रथम इकाई के अंक को इकाई के अंक से ऊर्ध्व गुणा करें।
- 121 x 302 में इकाई अंक हैं ‘1’ तथा ‘2’।

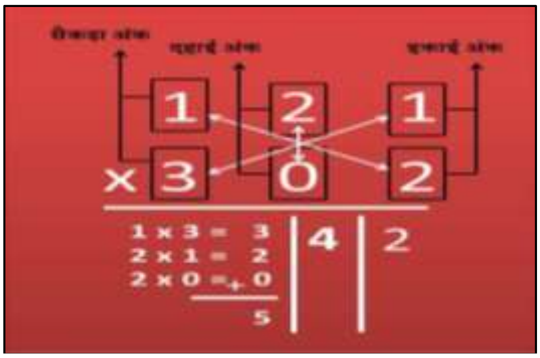
- इकाई अंकों को अर्थात् ‘2’ को ‘1’ से ऊर्ध्व गुणा करें, गुणा करने पर संख्या प्राप्त हुई (2 x 1 =) ‘2’.
- यह ‘2’ उत्तर का दाहिना अंक है।



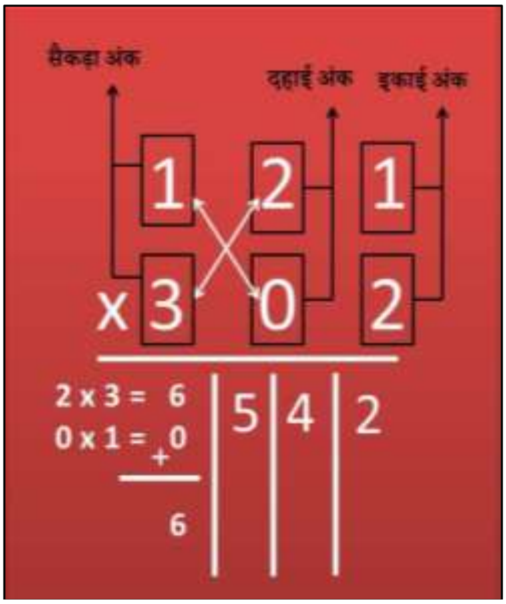
- ‘2’ को ‘1’ से गुणा करना ही ऊर्ध्व गुणा है।
- 121 x 302 में दहाई अंक हैं ‘2’ तथा ‘0’।
- अब इकाई के अंकों को दहाई के अंको से तिर्यक् गुणा करें अर्थात् ‘1’ को ‘0’ से गुणा करें तथा ‘2’ को ‘2’ से गुणा करें 1 x 0 = 0, 2 x 2 = 4, गुणा करके दोनों उत्तरों को जोड़ लें 0 + 4 = 4.



- 121 x 302 में सैकड़ा अंक हैं ‘1’ तथा ‘3’.
- अब इकाई के अंकों को सैकड़ा के अंकों से तिर्यक् गुणा करें अर्थात् 1 x 3 = 3, 2 x 1 = 2 व दहाई अंक को दहाई अंक से ही ऊर्ध्व गुणा करें अर्थात् 2 x 0 = 0, गुणा करके तीनों उत्तरों को जोड़ लें 3 + 2 + 0 = 5.



- अब दहाई के अंकों को सैकड़ा के अंकों से तिर्यक् गुणा करें अर्थात् 2 x 3 = 6, 0 x 1 = 0 गुणा करके दोनों उत्तरों को जोड़ लें 6 + 0 = 6.

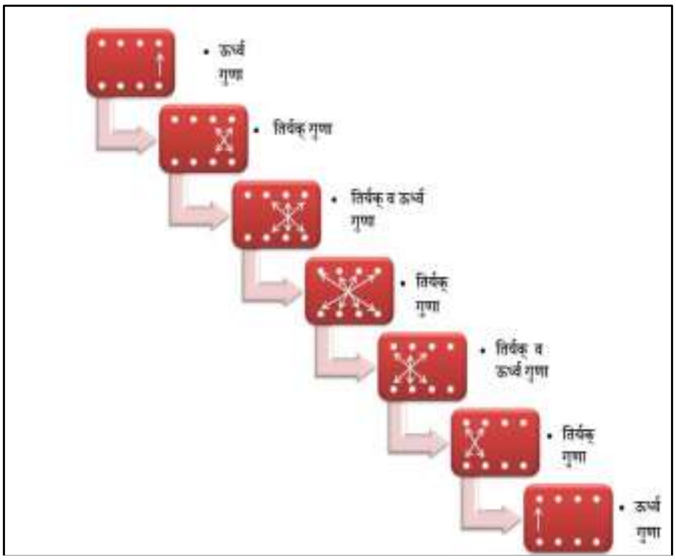


- अब सैकड़ा अंकों को अर्थात् '3' को '1' से ऊर्ध्व गुणा करें, गुणा करने पर संख्या प्राप्त हुई (3 x 1 =) '3'.

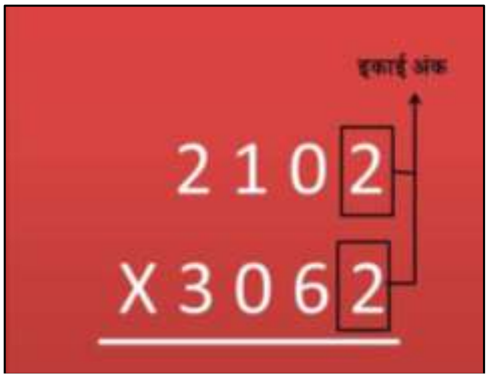
- अतः 121 x 302 = 36542

चार अंकों की संख्या को चार अंकों वाली संख्या से गुणा

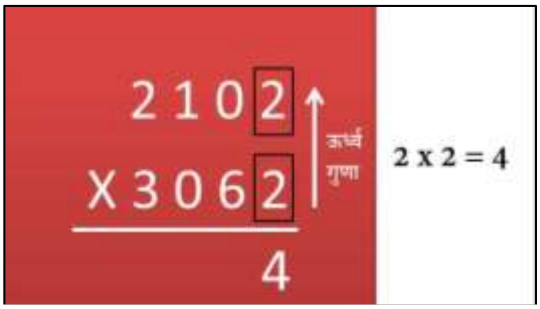
4 अंकों की संख्या को 4 अंकों वाली संख्या से गुणा करने के लिए निम्न पद्धति को अपनाया जाता है, जिसे इस चित्र के माध्यम से स्पष्ट किया जा रहा है –



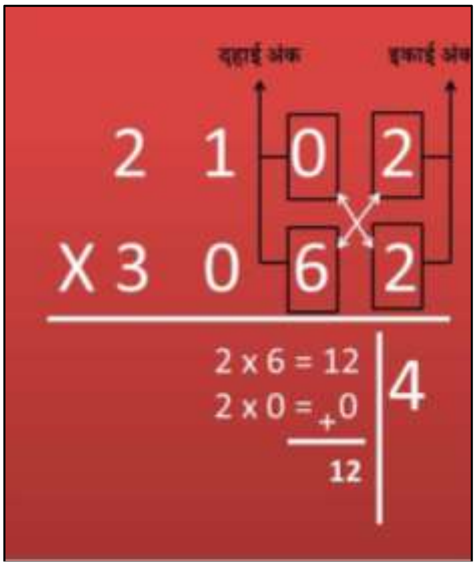
- उदाहरण के तौर पर हम 2102 x 3062 गुणा करेंगे।
- सर्वप्रथम इकाई के अंक को इकाई के अंक से ऊर्ध्व गुणा करें।
- 2102 x 3062 में इकाई अंक हैं '2' तथा '2'।



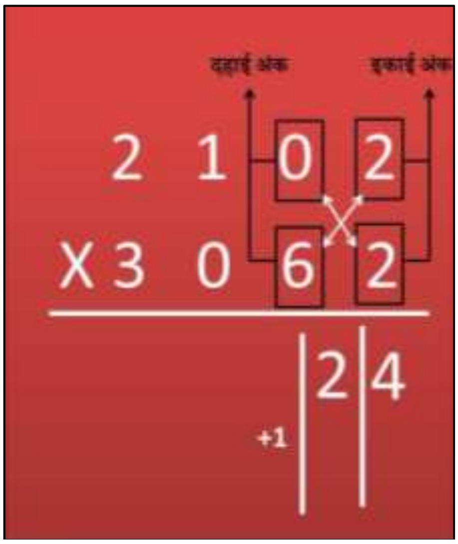
- इकाई अंक को इकाई अंक से अर्थात् '2' को '2' से ऊर्ध्व गुणा करें, गुणा करने पर संख्या प्राप्त हुई (2 x 2 =) '4'.
- यह '4' उत्तर का दाहिना अंक है।



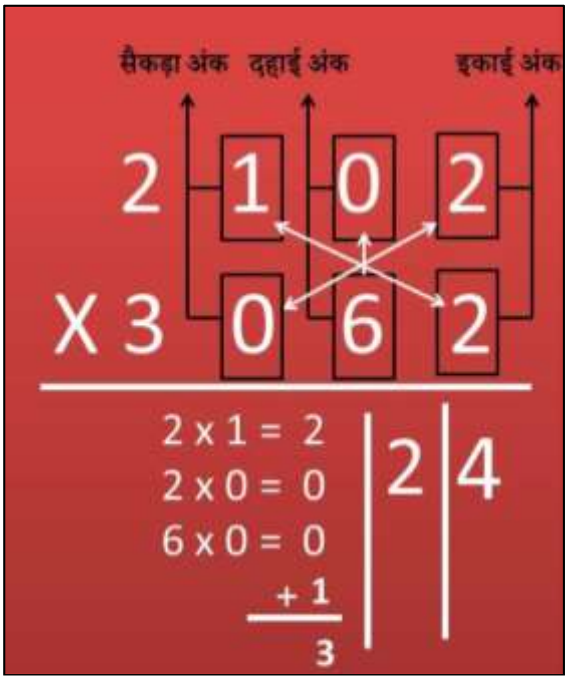
- 2102 x 3062 में दहाई अंक हैं ‘0’ तथा ‘6’।
- अब इकाई के अंकों को दहाई के अंको से तिर्यक् गुणा करें अर्थात् ‘2’ को ‘6’ से गुणा करें तथा ‘2’ को ‘0’ से गुणा करें 2 x 6 = 12, 2 x 0 = 0, गुणा करके दोनों उत्तरों को जोड़ लें 12 + 0 = 12.



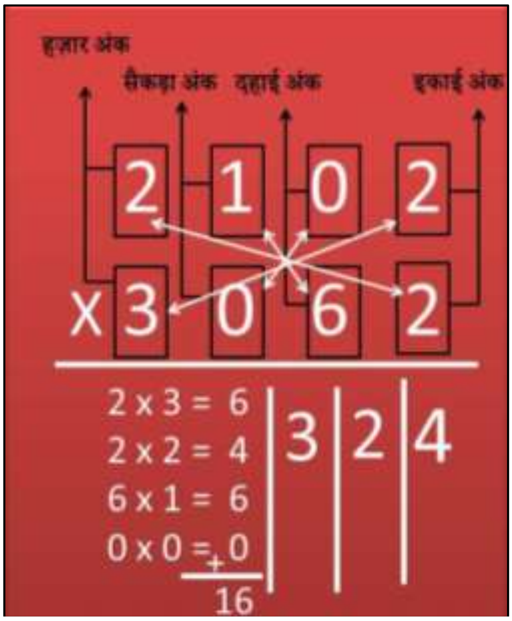
- अब प्राप्त अंकों को नीचे दिए गए चित्र के अनुसार लिखें।



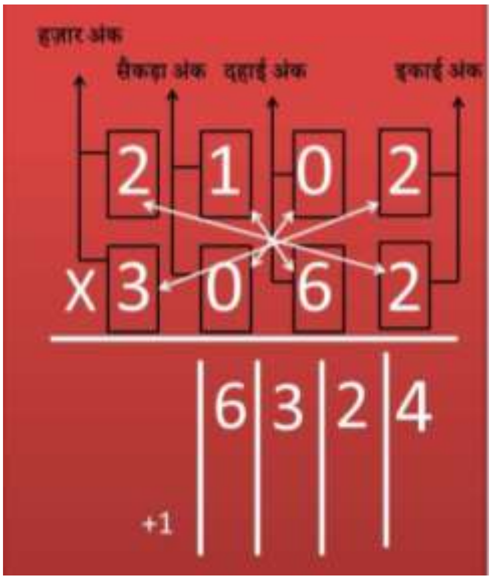
- 2102 x 3062 में सैकड़ा अंक हैं ‘1’ तथा ‘0’.
- अब इकाई के अंकों को सैकड़ा के अंकों से तिर्यक् गुणा करें अर्थात् 2 x 1 = 2, 2 x 0 = 0 व दहाई अंक को दहाई अंक से ही ऊर्ध्व गुणा करें अर्थात् 6 x 0 = 0, गुणा करके तीनों उत्तरों को जोड़ लें 2 + 0 + 0 = 2.
- अब ‘2’ में ‘1’ जोड़ें , जोड़ने पर संख्या प्राप्त हुई ‘3’



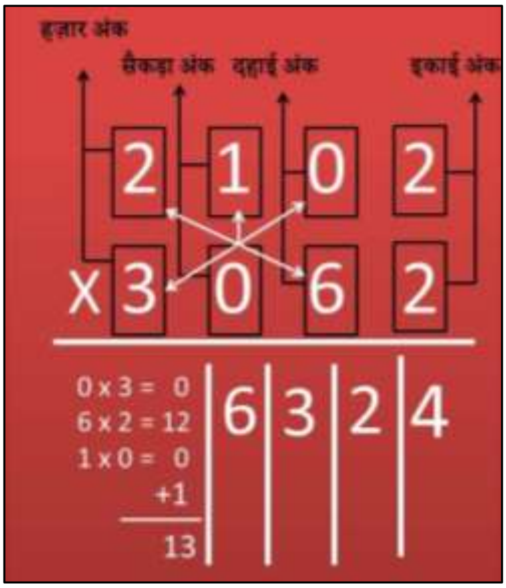
- 2102 x 3062 में हज़ार अंक हैं ‘2’ तथा ‘3’.
- अब इकाई के अंकों को हज़ार के अंकों से तिर्यक् गुणा करें अर्थात् 2 x 2 = 4, 2 x 3 = 6 व दहाई अंकों को सैकड़ा अंकों से तिर्यक् गुणा करें अर्थात् 6 x 1 = 6, 0 x 0 = 0 गुणा करके चारों उत्तरों को जोड़ लें 4 + 6 + 6 + 0 = 16.



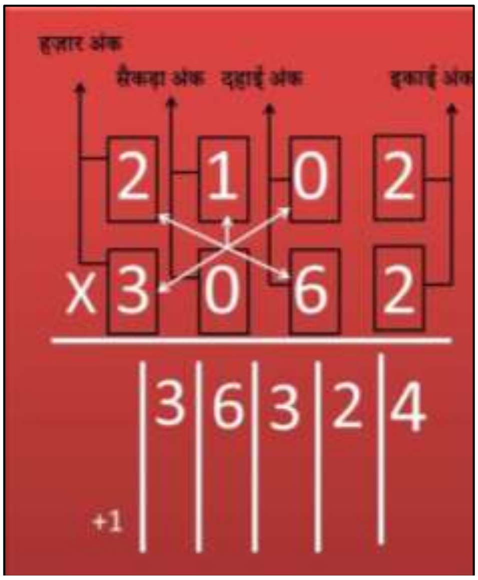
- अब प्राप्त अंकों को नीचे दिए गए चित्र के अनुसार लिखें।



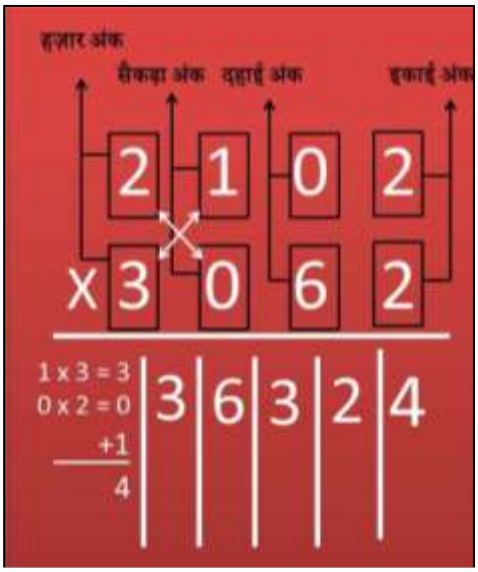
- अब दहाई के अंकों को हज़ार के अंकों से तिर्यक् गुणा करें अर्थात् 6 x 2 = 12, 0 x 3 = 0 व सैकड़ा अंक को सैकड़ा अंक से ही ऊर्ध्व गुणा करें अर्थात् 0 x 1 = 0, गुणा करके तीनों उत्तरों को जोड़ लें 12 + 0 + 0 = 12.
- अब '12' में '1' जोड़ें , जोड़ने पर संख्या प्राप्त हुई '13'



- अब प्राप्त अंकों को नीचे दिए गए चित्र के अनुसार लिखें।

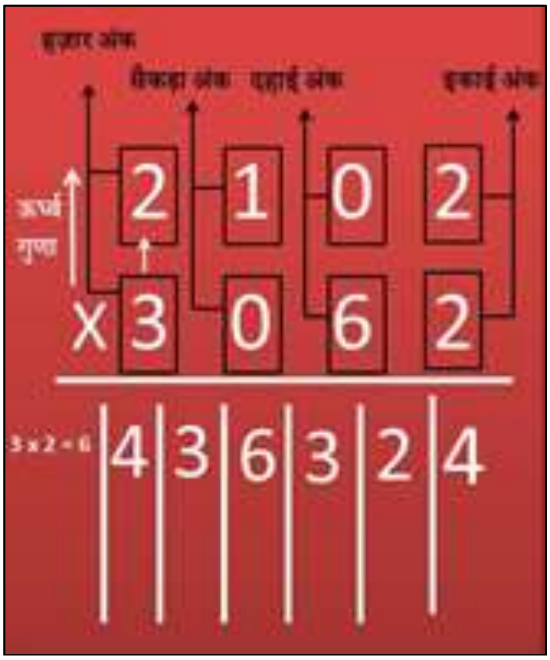


- अब सैकड़ा के अंकों को हज़ार के अंकों से तिर्यक् गुणा करें अर्थात् 1 x 3 = 3, 0 x 2 = 0 गुणा करके दोनों उत्तरों को जोड़ लें 3 + 0 = 3.
- अब '3' में '1' जोड़ें , जोड़ने पर संख्या प्राप्त हुई '4'



- अब प्राप्त अंकों को नीचे दिए गए चित्र के अनुसार लिखें।

- अब हज़ार अंकों को अर्थात् '3' को '2' से ऊर्ध्व गुणा करें, गुणा करने पर संख्या प्राप्त हुई (3 x 2 =) '6'.



- अतः 2102 x 3062 = 6436324

गुणा की जाँच विधि

- पहली संख्या का बीजांक x दूसरी संख्या का बीजांक = प्राप्त गुणनफल का बीजांक (उत्तर का बीजांक)
- पहली संख्या का बीजांक = 2 + 1 + 0 + 2 = 5
- दूसरी संख्या का बीजांक = 3 + 0 + 6 + 2 = 11, 1 + 1 = 2
- प्राप्त गुणनफल का बीजांक (उत्तर का बीजांक) = 6 + 4 + 3 + 6 + 3 + 2 + 4 = 10, 1 + 0 = 1
- पहली संख्या का बीजांक (5) x दूसरी संख्या का बीजांक (2) = प्राप्त गुणनफल का बीजांक (उत्तर का बीजांक) (1)
- 5 x 2 = 10, 1+0 = 1, अतः उत्तर सही है।

गुणा में दशमलव का प्रयोग

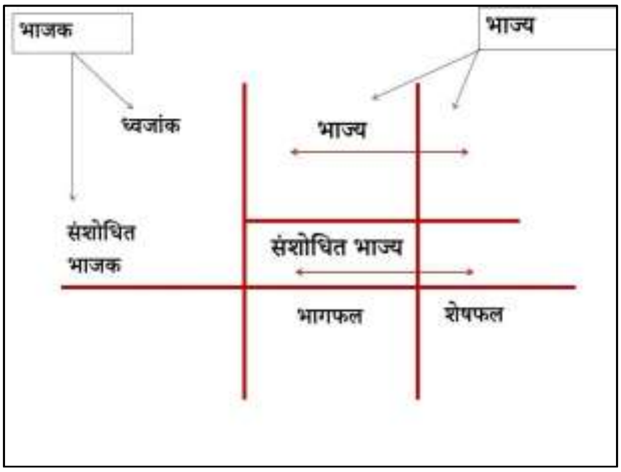
इस गुणा करने की प्रक्रिया में दशमलव से कोई अन्तर नहीं आता, अपितु उत्तर में यथोचित स्थान पर दशमलव लगाने से सही उत्तर की प्राप्ति हो जाती है। यदि गुणा की जाने वाली दानों संख्याओं में एक एक के बाद (दाई ओर से गिनने पर) दशमल लगे हों, तो गुणा करने के पश्चात् उत्तर में भी दो अंक के बाद (दाई ओर से गिनने पर) दशमलव लगा दिया जता है। इसी प्रकार यदि एक संख्या में एक अंक के बाद व दूसरी संख्या में दो अंक के बाद दशमलव लगा हो तो गुणा करने के पश्चात् उत्तर में भी तीन अंक के बाद (दाई ओर से गिनने पर) दशमलव लगा दिया जता है।

- आइये इसे अब एक उदाहरण के माध्यम से समझते हैं - 23.67 x 73.92 = ?

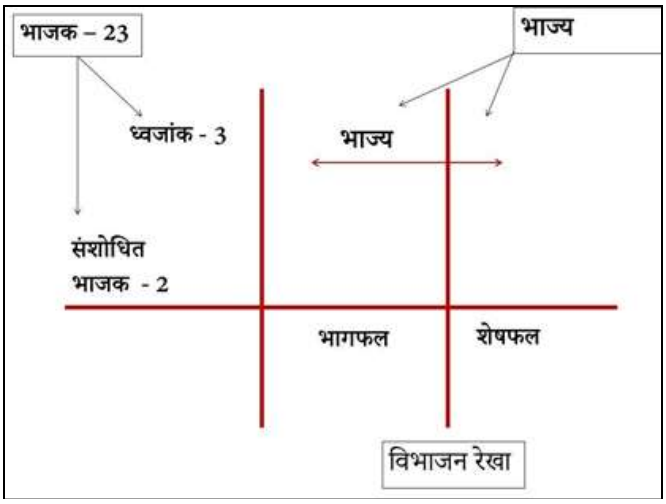
- एक अन्य उदाहरण भी देख लेते हैं – 2.6 x 7.9 = ?

भाग विधि

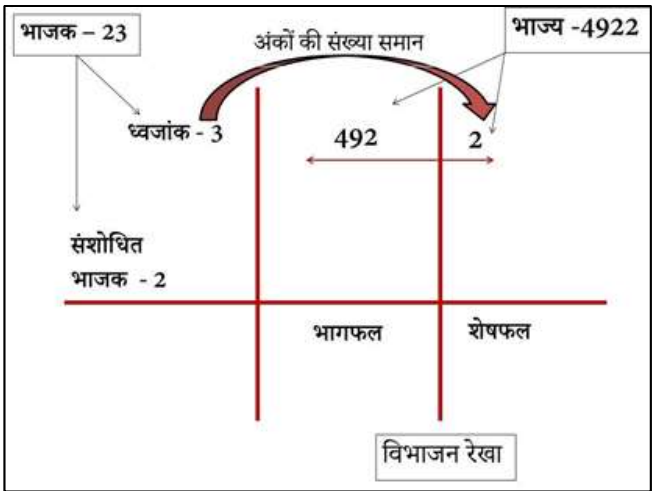
जिस प्रकार ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र का प्रयोग करके अनेक अंकों का गुणनफल सरलता से प्राप्त किया जा सकता है, उसी प्रकार इसी सूत्र से भागफल भी बड़ी सरल विधि से प्राप्त किया जा सकता है। ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र से भागफल प्राप्त करने की इस विधि को ध्वजांक विधि कहा जाता है। ध्वजांक विधि को जानने से पहले इस चित्र को ध्यान से देख लें –



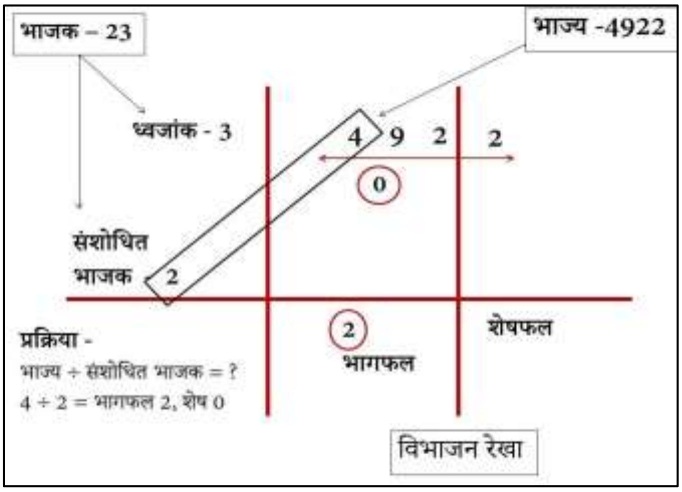
- आइये इस ध्वजांक विधि को अब एक उदाहरण के माध्यम से समझते हैं - 4922 ÷ 23
- यहाँ भाज्य ‘4922’ तथा भाजक ‘23’
- यहाँ भाजक ‘23’ के दो भाग किये जाते हैं - पहला संशोधित भाजक ‘2’ व दूसरा ध्वजांक ‘3’।
- ध्वजांक ‘3’ को संशोधित भाजक ‘2’ के थोड़ा ऊपर दाहिनी ओर लिखना चाहिये।



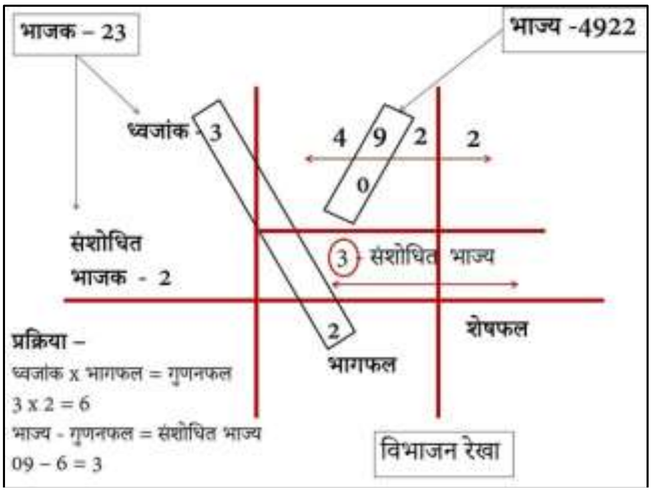
- ध्वजांक में जितने अंक होते हैं, भाज्य के इकाई की ओर से उतने ही अंक विभाजन रेखा के दायीं ओर लिखे जाते हैं।
- यहाँ ध्वजांक में केवल एक अंक ‘3’ है, अतः भाज्य ‘4922’ के इकाई की ओर से एक ही अंक ‘2’ को विभाजन रेखा के दायीं ओर लिखा गया है अर्थात् ‘492’ को एक साथ व अन्तिम अंक ‘2’ को विभाजन रेखा के दायीं ओर लिखा गया है।



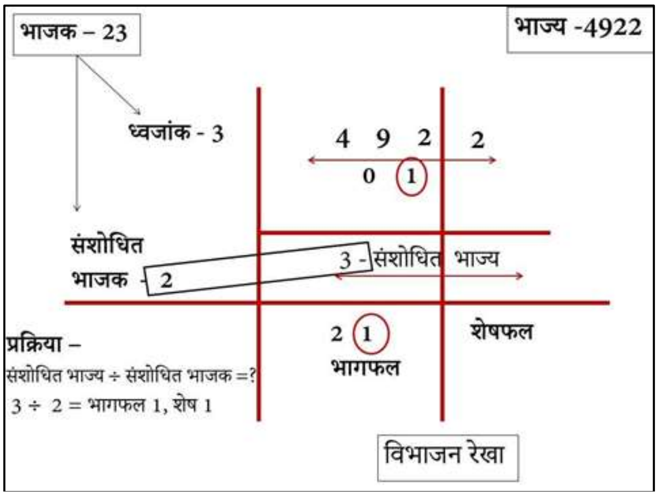
- अब भाज्य के प्रथम अंक ‘4’ को संशोधित भाजक ‘2’ से भाग करें। 4 ÷ 2 = ?, ‘4’ को ‘2’ से भाग करने पर भागफल ‘2’ को भागफल के स्थान पर लिख दें और शेष बचा ‘0’। इस ‘0’ को भाज्य ‘4’ व ‘9’ के बीच में थोड़ा नीचे की ओर लिखें।



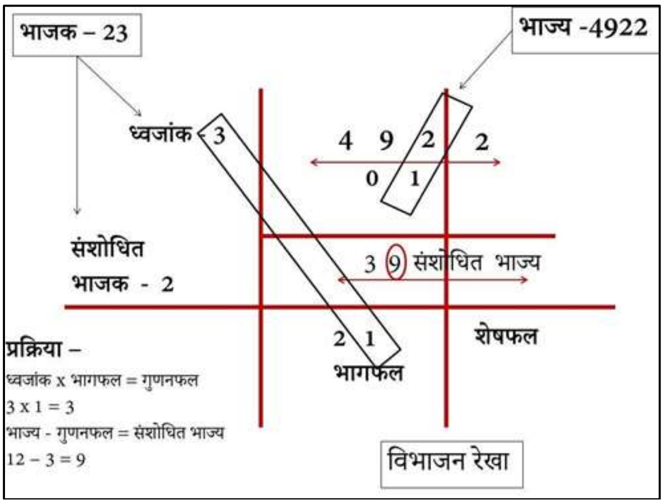
- अब अगला भाज्य ‘09’ है। इसमें से अभी भाग देने की आवश्यकता नहीं है, क्योंकि अभी ध्वजांक का उपयोग नहीं किया गया है। हमें पहले इस भाज्य को शुद्ध करना होगा।
- इस ‘09’ भाज्य को शुद्ध करने के लिये ध्वजांक ‘3’ को भाग्फल के अंक ‘2’ से गुणा करेंगे = 2 x 3 = 6। तत्पश्चात् ‘09’ भाज्य में से इस गुणनफल ‘6’ को घटा देंगे = 09 – 6 = 3
- यह ‘3’ हमारा संशोधित भाज्य है।



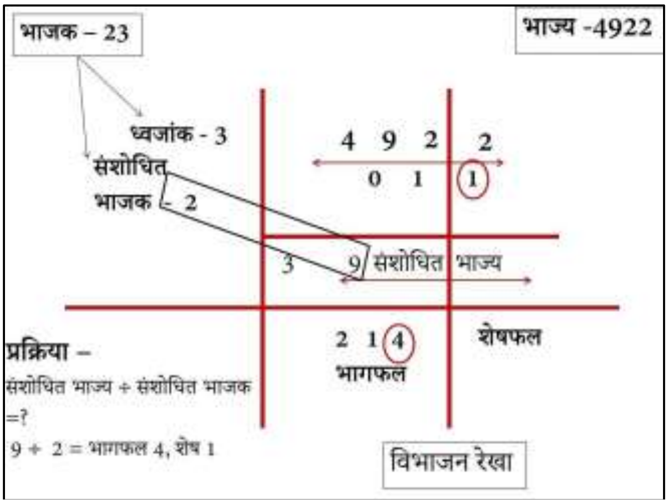
- अब संशोधित भाज्य के 3 को संशोधित भाजक '2' से भाग करें। '3' को '2' से भाग करने पर भागफल प्राप्त हुआ '1'। इस '1' को भागफल के स्थान पर लिख दें और शेष बचा '1'। इस '1' को '9' व '2' के बीच में थोड़ा नीचे की ओर लिखें।



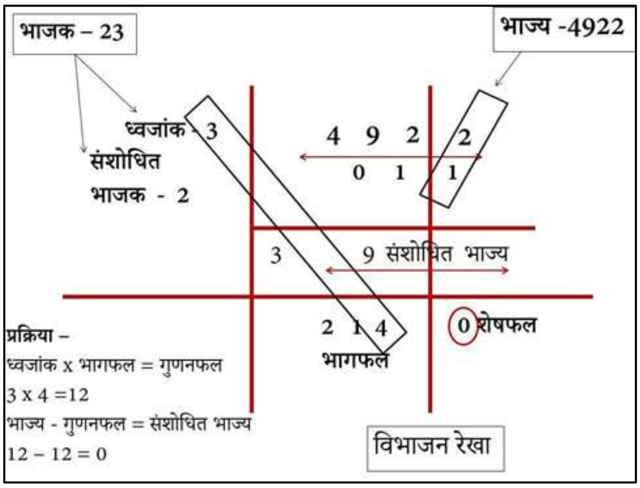
- अब अगला भाज्य '12' है। इसमें से अभी भाग देने की आवश्यकता नहीं है, क्योंकि अभी ध्वजांक का उपयोग नहीं किया गया है। हमें पहले इस भाज्य को शुद्ध करना होगा।
- इस '12' भाज्य को शुद्ध करने के लिये ध्वजांक '3' को भाग्फल के अंक '1' से गुणा करेंगे = 3 x 1 = 3। तत्पश्चात् '12' भाज्य में से इस गुणनफल '3' को घटा देंगे = 12 – 3 = 9
- यह '9' हमारा संशोधित भाज्य है।



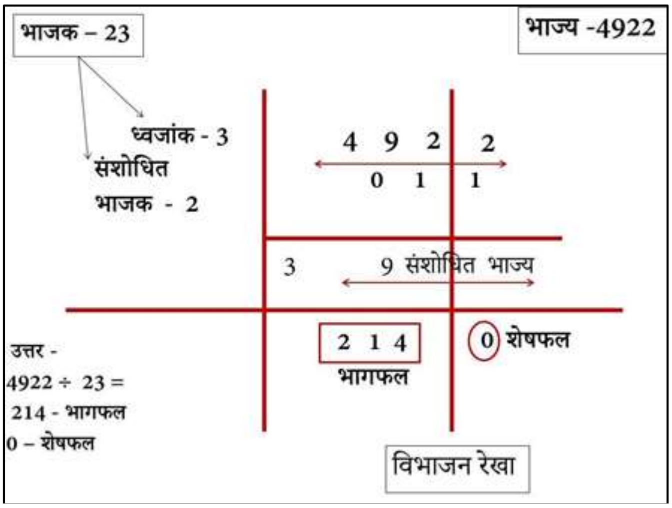
- अब संशोधित भाज्य के '9' को संशोधित भाजक '2' से भाग करें। '9' को '2' से भाग करने पर भागफल प्राप्त हुआ '4'। इस '4' को भागफल के स्थान पर लिख दें और शेष बचा '1'। इस '1' को '2' व '2' के बीच में थोड़ा नीचे की ओर लिखें।



- अब अगला भाज्य '12' है। इसमें से अभी भाग देने की आवश्यकता नहीं है, क्योंकि अभी ध्वजांक का उपयोग नहीं किया गया है। हमें पहले इस भाज्य को शुद्ध करना होगा।
- इस '12' भाज्य को शुद्ध करने के लिये ध्वजांक '3' को भाग्फल के अंक '4' से गुणा करेंगे = 3 x 4 = 12। तत्पश्चात् '12' भाज्य में से इस गुणनफल '12' को घटा देंगे = 12 – 12 = 0



- उत्तर प्राप्त हुआ 0 यही शेष है। यह 0 विभाजन रेखा के उपरांत प्राप्त हुआ है अतः यही शेष है। यहाँ हमारी भाग की क्रिया समाप्त होती है।
- उत्तर = भागफल 214, शेषफल = 0



भाग की जाँच विधि

- भाज्य का बीजांक/नवांक = भागफल का बीजांक x भाजक का बीजांक + शेषफल का बीजांक
- भाज्य का बीजांक = 4 + 9 + 2 + 2 = 17, 17 = 1 + 7 = 8
- भागफल का बीजांक = 2 + 1 + 4 = 7
- भाजक का बीजांक = 2 + 3 = 5
- शेषफल का बीजांक = 0
- भाज्य का बीजांक/नवांक (8) = भागफल का बीजांक (7) x भाजक का बीजांक (5) + शेषफल का बीजांक (0)
- 8 = 7 x 5 = 35, 35 + 0 = 3 5
- 35 का बीजांक = 3 + 5 = 8, अतः उत्तर सही है।

इस शोध पत्र में हमने गुणन व भाग प्रश्नों को बड़े ही रोचक तरीके से हल करने की प्रक्रिया को समझा। यह एक मानसिक प्रक्रिया है, जिसमें कम समय में भी दीर्घ संख्याओं वाले भाग व गुणन प्रश्नों यथाशीघ्र हल किया जा सकता है।

सन्दर्भ

1. Ancient Indian mathematics – T.S Bhanumurthy, wiley eastern ltd. Lucknow.
2. History of Indian mathematics Dr. BB Dutta and Dr. A.N. Singh
3. Vedic metaphysics S bharati krisna tirthji Motilal Banarasidas Delhi
4. गणित का इतिहास – सुधाकर द्विवेदी, बनारस प्रभाकरी प्रिंटिंग प्रेस, वाराणसी
5. लीलावती भास्कराचार्य, चौखम्बा विद्याभवन, वाराणसी
6. वैदिक गणित – भारती कृष्णा तीर्थ, मोतीलाल बनारसी दास, दिल्ली २०११
7. वैदिक गणित भाग १,२,३,४ दिलीप कुलकर्णी, पुणे
8. वैदिक गणित विहंगम दृष्टि डॉ. कैलाश विश्वकर्मा
9. वैदिक गणित समग्र दृष्टि डॉ कैलाश, श्रीमती किरण शर्मा ब्रह्मानन्द स्नातकोत्तर महाविद्यालय हमीरपुर उत्तर प्रदेश
10. वैदिक गणित सम्बन्धी सम्पूर्ण साहित्य – डॉ. नेंद्र पुरी, रुड़की विश्वविद्यालय उत्तर प्रदेश
11. सिद्धान्त शिरोमणि भास्कराचार्य चौखम्बा विद्याभवन, वाराणसी